
Contrôle continu 3 - décembre 2024 (1h30)

Exercice 1. (4 points) Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une famille de vecteurs donnée par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ a \\ 7 \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel.

1. Déterminez les valeurs de a pour lesquelles la famille \mathcal{F} est libre.

2. Fixons $a = 2$.

(a) Déterminez le rang de la famille \mathcal{F} .

(b) Toujours pour $a = 2$, le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} ? On pourra discuter si besoin selon les valeurs de b . Justifiez votre réponse.

Exercice 2. (12 points)

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de B et en déduire ses valeurs propres.

(b) La matrice B est-elle diagonalisable?

(c) Calculer l'espace propre associé à chaque valeur propre.

(d) Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $B = PDP^{-1}$.

(e) Pour tout $n \geq 0$, calculer B^n .

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 2$, on note $\Delta_n = \det A_n$.

(a) Calculer Δ_1 et Δ_2 .

(b) Montrez que pour tout $n \geq 3$, Δ_n satisfait la relation de récurrence :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} + 3\Delta_{n-2}.$$

(c) Décrire $\begin{pmatrix} \Delta_n \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de B et $\begin{pmatrix} \Delta_{n-1} \\ \Delta_n \end{pmatrix}$.

(d) En déduire Δ_n pour tout $n \geq 3$.

Exercice 3. (4 points) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère l'endomorphisme u défini par

$$u(e_1) = e_2 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_3 \quad \text{et} \quad u(e_3) = 0.$$

1. Calculer $\ker u$.
2. Déterminer les valeurs propres de u .
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable? Trigonalisable?
4. Donner une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Préciser la matrice de u dans cette base.